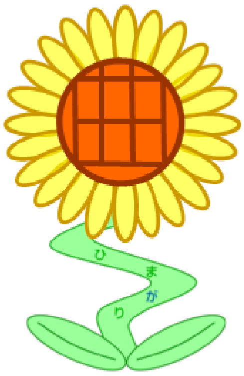
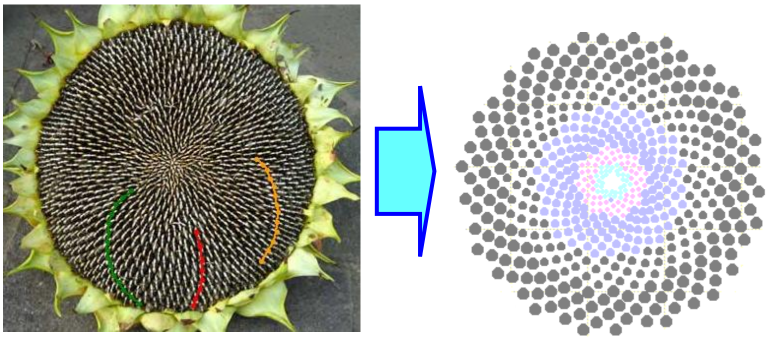
数学広場（別名：ひまがり広場）

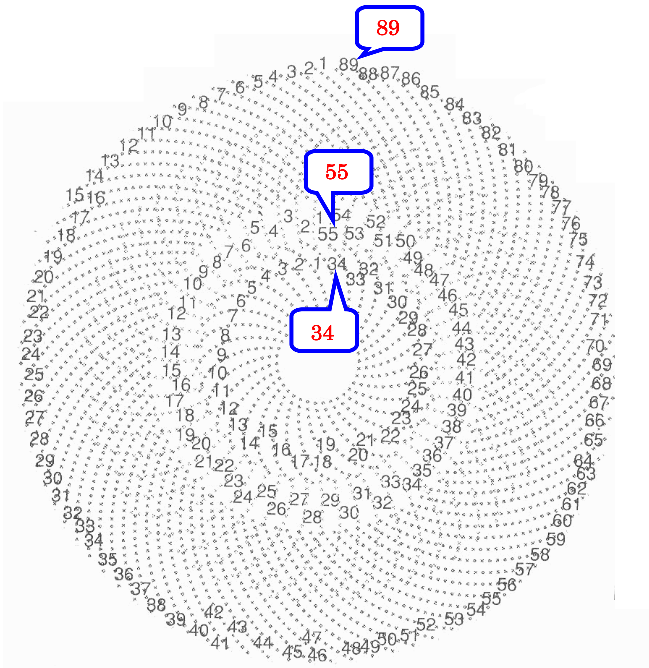


※　ひまがり　･･･　曲がりながら太陽に向かって力強く成長する
架空のキク科の一年草である。
日曲りと表記されることもある。
花言葉は、「紆余曲折することがあっても、
明るく夢に向かって努力すれば成功する」

「つまずいたり、回り道をしたりすることがあっても諦めずに、
夢や目標に向かって真っすぐな気持ちで精一杯の努力をする人になろう！」
という願いを込めて創られた数学応援花です。

数学と　黄金花『ひまわり』





ひまわりの内側から 34,　55,　89 と巻いている。

● 「ひまわり」の種は、右巻き、左巻きの渦が交互に現れ、右図のように、種の個数が 34, 55, 89 とフィボナッチ数列になっています。

『ひまわり』の中に、フィボナッチ数列が存在！

㊟ フィボナッチ数列･･･前２つの項を加えたものが次の項となっている数列

$\{a_n\}$: 1， 1， 2， 3， 5， 8， 13， 21， 34， 55， 89， 144， 233， 377， 610， 987， 1597， 2584， ……

例　5＋8＝13　，8＋13＝21　，13＋21＝34　，21＋34＝55　，34＋55＝89　，･･･

★漸化式で表すと、$a_1=1$　，$a_2=1$　，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$　です。

これを解くと、$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$　となります。

※ a_n は無理数 $\sqrt{5}$ を用いた式ですが、a_n の値はすべて整数です。「不思議だなぁー」と思いましたか？

★ $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$: $\dfrac{1}{1}$, $\dfrac{2}{1}$, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{8}{5}$, $\dfrac{13}{8}$, $\dfrac{21}{13}$, $\dfrac{34}{21}$, $\dfrac{55}{34}$, $\dfrac{89}{55}$, ……　について考えると、

…, $\dfrac{8}{5}=1.6$, $\dfrac{13}{8}=1.625$, $\dfrac{21}{13}\fallingdotseq1.6153846$, $\dfrac{34}{21}\fallingdotseq1.6190476$, $\dfrac{55}{34}\fallingdotseq1.6176471$, $\dfrac{89}{55}\fallingdotseq1.6181818$, …

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ ?$$

フィボナッチ数列なので、　$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

両辺を a_{n+1} で割ると、　$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+1}}+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$

ここで $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=x_n$　とおくと、$x_{n+1}=1+\dfrac{1}{x_n}$　　∴ $x_{n+1}x_n-x_n-1=0$　･･･①

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ が存在すると仮定して、$n\to\infty$ のとき　$x_{n+1}=x_n=\alpha$　とおくと、

①は　$\alpha^2-\alpha-1=0$　　∴ $\alpha=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$a_n>0$ なので、$\alpha>0$　よって、$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　つまり、$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\fallingdotseq1.618}$

⇨ フィボナッチ数列の中に、黄金比 が存在！

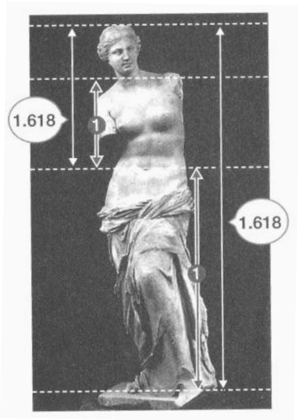
つまり、『ひまわり』の中に、黄金比 が存在！

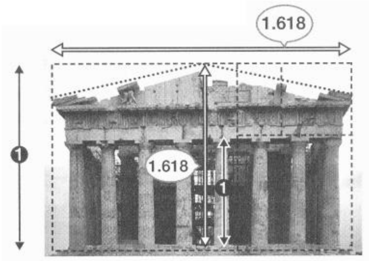
※ 黄金比 … 1 ： $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ≒ 1 ：1.618。究極の『美』の比率。神の比率。

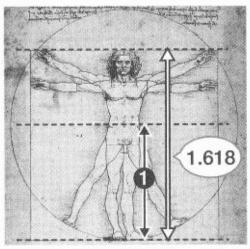
【黄金比が存在しているものの一例】

- ミロのヴィーナス（右図）
- パルテノン神殿（下図）
- ウィトルウィウス的人体図（下図）
- 名刺の縦と横の比率
- 正５角形の対角線どうしで分ける線分の比率
- フラワーアレンジメントの高さのバランス比
- 遺伝子を形づくる DNA 分子のらせん構造の一単位の長さと幅の比率

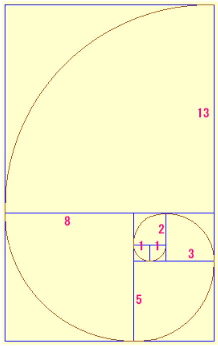
など、自然界のいたるところに黄金比は存在します。





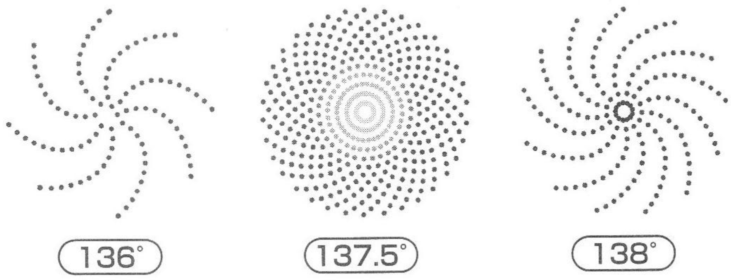


● 右図のように、４分の１の円を、半径１， １， ２， ３， ５， ８，…と書いていくと、螺旋ができます。「ひまわり」は、この螺旋にそって**黄金角**137.507° （137.507° ：222.493° ≒ 1 ：1.618）で種をつけることが知られています。



『ひまわり』の中に、黄金角 が存在！

下図のように、黄金角以外の角度（例 136° や 138° ）で種が配列されると仮定すると、無駄なすき間が生じてしまいます。このことからも分かるように、最高の密度にバランスよく種がつくために、黄金角（約 137.5° ）で種がついていると考えてよいでしょう。



数学的な意味も含めて、『ひまわり』は本当に黄金の花である！

数学と 黄金花『ひまわり』

数学の 応援花『ひまがり』の誕生！

※ フィボナッチ数列についての参考資料として、愛媛県総合教育センターHP の「学習指導資料→数学→教材２５」をご覧ください。